Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen

von

Prof. Dr. Michael Merz

und

Prof. Dr. Mario V. Wüthrich

Verlag Franz Vahlen München

Teil I Mathematische Grundlagen 1

1. Aussagenlogik und mathematische Beweisführung 3
- 1.1 Was ist Mathematik? 4
- 1.2 Axiom, Definition und mathematischer Satz 5
- 1.3 Aussagenlogik 7
- 1.4 Aussageformen und Quantoren 16
- 1.5 Vermutung, Satz, Lemma, Folgerung und Beweis 20
- 1.6 Mathematische Beweisführung 21
- 1.7 Vollständige Induktion 25

2. Mengenlehre 31
- 2.1 Mengen und Elemente 32
- 2.2 Mengenoperationen 34
- 2.3 Rechnen mit Mengenoperationen 37
- 2.4 Mengenoperationen für beliebig viele Mengen und Partitionen 41
- 2.5 Partitionen 42

3. Zahlenbereiche und Rechengesetze 43
- 3.1 Aufbau des Zahlensystems 44
- 3.2 Zahlenbereiche $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ 44
- 3.3 Zahlenbereiche $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ und $\overline{\mathbb{R}}$ 45
- 3.4 Zahlenbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{I}$ 49
- 3.5 Dezimal- und Dualsystem 51
- 3.6 Zahlenbereich $\mathbb{C}$ 52
- 3.7 Mächtigkeit von Mengen 63

4. Terme, Gleichungen und Ungleichungen 69
- 4.1 Konstanten, Parameter, Variablen und Terme 70
- 4.2 Gleichungen 70
- 4.3 Algebraische Gleichungen 73
- 4.4 Quadratische Gleichungen 76
- 4.5 Ungleichungen 80
- 4.6 Indizierung, Summen und Produkte 83

5. Trigonometrie und Kombinatorik 87
- 5.1 Trigonometrie 88
- 5.2 Binomialkoeffizienten 92
- 5.3 Binomischer Lehrsatz 94
- 5.4 Kombinatorik 95

6. Kartesische Produkte, Relationen und Abbildungen 105
- 6.1 Kartesische Produkte 106
- 6.2 Relationen 107
- 6.3 Äquivalenzrelationen 112
- 6.4 Ordnungsrelationen 114
- 6.5 Präferenzrelationen 116
- 6.6 Abbildungen 117
- 6.7 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität 123
- 6.8 Komposition von Abbildungen 124
- 6.9 Umkehrabbildungen 127

Teil II Lineare Algebra 133

7. Euklidischer Raum $\mathbb{R}^n$ und Vektoren 135
- 7.1 Ursprung der linearen Algebra 136
- 7.2 Lineare Algebra in den Wirtschaftswissenschaften 137
- 7.3 Euklidischer Raum $\mathbb{R}^n$ 137
- 7.4 Lineare Gleichungssysteme 141
- 7.5 Euklidisches Skalarprodukt und euklidische Norm 143
- 7.6 Orthogonalität und Winkel 146
- 7.7 Linearkombinationen und konvexe Mengen 150
- 7.8 Lineare Unterräume und Erzeugendensysteme 154
- 7.9 Lineare Unabhängigkeit 155
- 7.10 Basis und Dimension 161
- 7.11 Orthonormalisierungsverfahren von Schmidt 165
- 7.12 Orthogonale Komplemente und orthogonale Projektionen 166

8. Lineare Abbildungen und Matrizen 173
- 8.1 Lineare Abbildungen 174
- 8.2 Matrizen 178
- 8.3 Spezielle Matrizen 182
- 8.4 Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen, Matrizen und linearen Gleichungssystemen 183

8.5 Matrizenalgebra 186
8.6 Rang 194
8.7 Inverse Matrizen 197
8.8 Symmetrische und orthogonale Matrizen . 201
8.9 Spur 204
8.10 Determinanten 205

9. Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus 221

9.1 Eigenschaften linearer Gleichungssysteme 222
9.2 Elementare Zeilenumformungen und Zeilenstufenform 224
9.3 Gauß-Algorithmus 227
9.4 Matrizengleichungen 230
9.5 Bestimmung der Inversen mittels Gauß-Algorithmus 232
9.6 Bestimmung des Rangs mittels Gauß-Algorithmus 233

10. Eigenwerttheorie und Quadratische Formen 235

10.1 Eigenwerttheorie 236
10.2 Power-Methode 245
10.3 Ähnliche Matrizen 248
10.4 Diagonalisierbarkeit 249
10.5 Trigonalisierbarkeit 255
10.6 Quadratische Formen 256
10.7 Definitheitseigenschaften 259

Teil III Folgen und Reihen 265

11. Folgen 267

11.1 Folgenbegriff 268
11.2 Arithmetische und geometrische Folgen . . 272
11.3 Beschränkte und monotone Folgen 273
11.4 Konvergente und divergente Folgen 277
11.5 Majoranten- und Monotoniekriterium . . . 280
11.6 Häufungspunkte und Teilfolgen 281
11.7 Cauchy-Folgen 286
11.8 Rechenregeln für konvergente Folgen . . . 287

12. Reihen 297

12.1 Reihenbegriff 298
12.2 Konvergente und divergente Reihen 299
12.3 Arithmetische und geometrische Reihen . 300
12.4 Konvergenzkriterien 305
12.5 Rechenregeln für konvergente Reihen . . . 311
12.6 Absolute Konvergenz 313
12.7 Kriterien für absolute Konvergenz 315
12.8 Doppelreihen 320
12.9 Produkte von Reihen 321

Teil IV Reelle Funktionen 325

13. Eigenschaften reeller Funktionen 327

13.1 Reelle Funktionen 328
13.2 Rechenoperationen für reelle Funktionen . 328
13.3 Beschränktheit und Monotonie 330
13.4 Konvexität und Konkavität 333
13.5 Ungleichungen 340
13.6 Symmetrische und periodische Funktionen 341
13.7 Infimum und Supremum 345
13.8 Minimum und Maximum 347
13.9 c-Stellen und Nullstellen 350
13.10 Grenzwerte von reellen Funktionen 351
13.11 Landau-Symbole 365
13.12 Asymptoten und Näherungskurven 366

14. Spezielle reelle Funktionen 369

14.1 Polynome 370
14.2 Rationale Funktionen 376
14.3 Algebraische und transzendente Funktionen 386
14.4 Potenzfunktionen 388
14.5 Exponential- und Logarithmusfunktion . . 390
14.6 Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion 395
14.7 Trigonometrische Funktionen 398

15. Stetige Funktionen 407

15.1 Stetigkeit 408
15.2 Einseitige Stetigkeit 412
15.3 Unstetigkeitsstellen und ihre Klassifikation 414
15.4 Stetig hebbare Definitionslücken 416

15.5 Eigenschaften stetiger Funktionen 419
15.6 Stetigkeit spezieller Funktionen 421
15.7 Satz vom Minimum und Maximum 425
15.8 Nullstellensatz und Zwischenwertsatz . . . 427
15.9 Fixpunktsätze 430
15.10 Gleichmäßige Stetigkeit 433

Teil V
Differentialrechnung und Optimierung in $\mathbb{R}$ **437**

16. Differenzierbare Funktionen **439**
16.1 Tangentenproblem 440
16.2 Differenzierbarkeit 441
16.3 Weierstraßsche Zerlegungsformel 445
16.4 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen 446
16.5 Differenzierbarkeit elementarer Funktionen 452
16.6 Ableitungen höherer Ordnung 458
16.7 Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . 462
16.8 Regeln von L'Hôspital 472
16.9 Änderungsraten und Elastizitäten 479

17. Taylor-Formel und Potenzreihen **487**
17.1 Taylor-Polynom 488
17.2 Taylor-Formel 492
17.3 Taylor-Reihe 495
17.4 Potenzreihen und Konvergenzradius 500
17.5 Quotienten- und Wurzelkriterium für Potenzreihen 503
17.6 Rechenregeln für Potenzreihen 505
17.7 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen 508

18. Optimierung und Kurvendiskussion in $\mathbb{R}$ **511**
18.1 Optimierung und ökonomisches Prinzip . . 512
18.2 Notwendige Bedingung für Extrema 512
18.3 Hinreichende Bedingungen für Extrema . . 515
18.4 Notwendige Bedingung für Wendepunkte 522
18.5 Hinreichende Bedingungen für Wendepunkte 524
18.6 Kurvendiskussion 527

Teil VI
Integralrechnung in $\mathbb{R}$ **533**

19. Riemann-Integral **535**
19.1 Grundlagen 536
19.2 Riemann-Integrierbarkeit 536
19.3 Eigenschaften von Riemann-Integralen . . 547
19.4 Ungleichungen 550
19.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung 552
19.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 554
19.7 Berechnung von Riemann-Integralen 560
19.8 Integration spezieller Funktionsklassen . . 572
19.9 Flächeninhalt zwischen zwei Graphen . . . 577
19.10 Uneigentliches Riemann-Integral 578
19.11 Integration von Potenzreihen 595

20. Riemann-Stieltjes-Integral **597**
20.1 Riemann-Stieltjes-Integrierbarkeit 598
20.2 Eigenschaften von Riemann-Stieltjes-Integralen 601
20.3 Reelle Funktionen von beschränkter Variation 603
20.4 Existenzresultate für Riemann-Stieltjes-Integrale 606
20.5 Berechnung von Riemann-Stieltjes-Integralen 610

Teil VII
Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ **617**

21. Folgen, Reihen und reellwertige Funktionen im $\mathbb{R}^n$ **619**
21.1 Folgen und Reihen 620
21.2 Topologische Grundbegriffe 625
21.3 Reellwertige Funktionen in n Variablen . . 629
21.4 Spezielle reellwertige Funktionen in n Variablen 632
21.5 Eigenschaften von reellwertigen Funktionen in n Variablen 639
21.6 Grenzwerte von reellwertigen Funktionen in n Variablen 643
21.7 Stetige Funktionen 644

22. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ **651**

22.1 Partielle Differentiation 652
22.2 Höhere partielle Ableitungen 660
22.3 Totale Differenzierbarkeit 664
22.4 Richtungsableitung 673
22.5 Partielle Änderungsraten und partielle Elastizitäten 676
22.6 Implizite Funktionen 679
22.7 Taylor-Formel und Mittelwertsatz 684

23. Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$ **691**

23.1 Riemann-Integrierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ 692
23.2 Eigenschaften von mehrfachen Riemann-Integralen 695
23.3 Satz von Fubini 697
23.4 Mehrfache Riemann-Integrale über Normalbereiche 701
23.5 Parameterintegrale 702

Teil VIII
Optimierung im $\mathbb{R}^n$ **705**

24. Nichtlineare Optimierung im $\mathbb{R}^n$ **707**

24.1 Grundlagen 708
24.2 Optimierung ohne Nebenbedingungen . . . 708
24.3 Optimierung unter Gleichheitsnebenbedingungen 724
24.4 Wertfunktionen und Einhüllendensatz . . . 740
24.5 Optimierung unter Ungleichheitsnebenbedingungen 745
24.6 Optimierung unter Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen 753

25. Lineare Optimierung **759**

25.1 Grundlagen 760
25.2 Graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme 762
25.3 Standardform eines linearen Optimierungsproblems 764
25.4 Simplex-Algorithmus 771
25.5 Sonderfälle bei der Anwendung des Simplex-Algorithmus 779
25.6 Phase I und Phase II des Simplex-Algorithmus 782
25.7 Dualität 785
25.8 Dualer Simplex-Algorithmus 792

Teil IX
Numerische Verfahren **795**

26. Intervallhalbierungs-, Regula-falsi- und Newton-Verfahren **797**

26.1 Numerische Lösung von Gleichungen . . . 798
26.2 Intervallhalbierungsverfahren 799
26.3 Regula-falsi-Verfahren 801
26.4 Newton-Verfahren 804
26.5 Sekantenverfahren und vereinfachtes Newton-Verfahren 808

27. Polynominterpolation **813**

27.1 Grundlagen 814
27.2 Lagrangesches Interpolationspolynom . . . 816
27.3 Newtonsches Interpolationspolynom 817
27.4 Interpolationsfehler 821
27.5 Tschebyscheff-Stützstellen 822

28. Spline-Interpolation **825**

28.1 Grundlagen 826
28.2 Lineare Splinefunktion 828
28.3 Quadratische Splinefunktion 829
28.4 Kubische Splinefunktion 831

29. Numerische Integration **839**

29.1 Grundlagen 840
29.2 Rechteckformeln 841
29.3 Tangentenformel 842
29.4 Newton-Cotes-Formeln 844
29.5 Zusammengesetzte Newton-Cotes-Formeln 849

Teil X
Anhang **853**

A. Mathematische Symbole **855**

B. Griechisches Alphabet **861**

C. Namensverzeichnis **863**

D. Literaturverzeichnis **867**

Sachverzeichnis **871**